

ÉLÉMENTS

A. Chouinoy

D'ANALYSE MATHÉMATIQUE

A L'USAGE

DES INGÉNIEURS ET DES PHYSICIENS

Cours professé à l'Ecole centrale des Arts et Manufactures

PAR

M. APPELL

MEMBRE DE L'INSTITUT



PARIS

GEORGES CARRÉ ET C. NAUD, ÉDITEURS

3, RUE RACINE, 3

—
1898

CHAPITRE XXIV

VALEUR NUMÉRIQUE D'UNE INTÉGRALE DÉFINIE MÉTHODES D'APPROXIMATION INTÉGRATEURS ET INTÉGRAPHES

I. — MÉTHODES D'APPROXIMATION

418. *Méthode générale.* — Une intégrale définie

$$\int_a^b f(x) dx,$$

représente l'aire comprise entre l'axe des x , la courbe dont l'équation en coordonnées rectangulaires est

$$y = f(x),$$

et les deux ordonnées qui correspondent aux abscisses a et b . Lorsqu'on ne sait pas calculer exactement cette aire, on en obtient une valeur approchée en remplaçant la courbe $y = f(x)$ par une autre courbe qui s'en écarte très peu et dont on sait calculer l'aire.

419. *Méthode des trapèzes.* — Une première méthode consiste à substituer à la courbe AB (fig. 213) un polygone inscrit $AM_2M_3\dots M_nB$

et à remplacer la surface cherchée par une somme de trapèzes limités par les ordonnées $AP_1, M_2P_2, M_3P_3, \dots, BP_{n+1}$. Pour obtenir une formule simple, on suppose ces ordonnées équidistantes : la distance ε de deux ordonnées consécutives est alors la

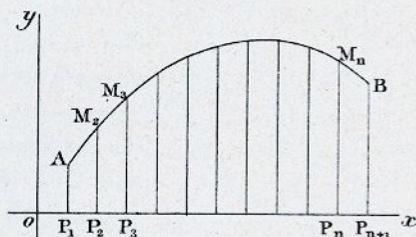


Fig. 213.

$n^{\text{ième}}$ partie de P_1P_{n+1} et, en appelant y_1, y_2, \dots, y_{n+1} , les ordonnées $AP_1, M_2P_2, \dots, BP_{n+1}$, on a, pour la surface, l'expression approchée

$$\varepsilon \left(\frac{y_1 + y_2}{2} + \frac{y_2 + y_3}{2} + \dots + \frac{y_n + y_{n+1}}{2} \right).$$

ou

$$\frac{\varepsilon}{2} (y_1 + 2y_2 + 2y_3 + \dots + 2y_n + y_{n+1}).$$

Cette formule donnera, pour l'aire, une valeur d'autant plus approchée que n sera plus grand.

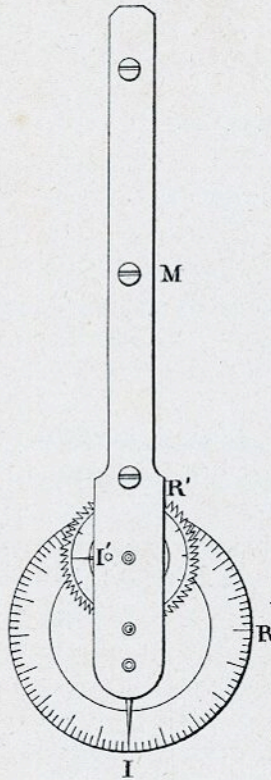


Fig. 214.

420. Emploi de la roulette Dupuit ⁽¹⁾.

— Cet appareil est formé de deux roues graduées R et R' (fig. 214), réunies à un manche M . La première a 100 millimètres de circonférence et son axe porte un pignon engrenant avec la seconde qui a dix fois plus de dents que le pignon. La circonférence de R est divisée en 100 divisions chacune d'un millimètre, celle de R' , en 10 divisions, dont chacune correspond à un tour complet de R . Un index I , fixé au manche, est placé en regard de R , un index analogue en regard de R' .

Pour mesurer la longueur d'une droite, on ramène d'abord chaque index sur le zéro de la graduation correspondante : on place ensuite l'appareil verticalement, de façon que le zéro de R coïncide avec l'une des extrémités de la droite et on pousse l'appareil de façon que la roulette roule sur la droite jusqu'à l'autre extrémité. Si, à la fin, l'index I' est entre 3 et 4 et si I indique 25 divisions, la longueur mesurée est 325 millimètres.

⁽¹⁾ Voyez DARIÈS, *Cubature des terrasses et Mouvement des terres*, p. 71, Gauthier-Villars.

Cela posé, pour mesurer avec la roulette Dupuit l'aire d'un contour fermé quelconque, par exemple, l'aire du segment P_1ABP_{n+1} considéré dans le numéro précédent, on prend un papier transparent, sur lequel on a tracé un réseau de parallèles équidistantes, dont la distance commune est une quantité connue ε (fig. 215). On dispose ce papier sur le contour dont on cherche

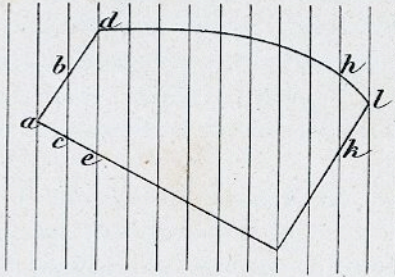


Fig. 215.

l'aire, de façon que deux des droites parallèles viennent se placer tangentiellellement au contour en a et l : si bc, de, \dots, hk sont les points où les parallèles intermédiaires coupent le contour, on substitue à ce contour le polygone inscrit $abd \dots hlk \dots eca$ dont l'aire est évidemment

$$\varepsilon \left(\frac{bc}{2} + \frac{bc + de}{2} + \dots + \frac{hk}{2} \right),$$

ou

$$\varepsilon (bc + de + \dots + hk).$$

En promenant la roulette successivement le long des droites bc, de, \dots, hk , on lit sur l'appareil la somme de ces droites, et, en multipliant par la quantité connue ε , on a une valeur approchée de l'aire.

Si le contour présente des points anguleux, comme dans la figure, il faut autant que possible placer le papier transparent de façon que chacun de ces points se trouve sur une des parallèles.

421. Méthode de Simpson.— La méthode de Simpson repose sur ce fait qu'on peut faire passer une parabole dont l'axe est

parallèle à Oy par trois points donnés. En effet, l'équation d'une telle parabole étant

$$y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma,$$

on peut disposer des coefficients α, β, γ , de façon que la parabole passe par trois points.

Ceci posé, pour évaluer l'aire d'un segment P_1ABP_{n+1} (fig. 213), on divise la base P_1P_{n+1} en un nombre *pair* ($n = 2p$) de parties égales et on mène les ordonnées correspondant aux points de division P_1, P_2, \dots, P_{n+1} : soient, comme précédemment, $y_1, y_2, y_3, \dots, y_{n+1}$, ces ordonnées, ε la distance de deux ordonnées consécutives.

Dans la méthode de Simpson, on substitue à l'arc de courbe AM_1M_2 un arc de parabole d'axe vertical, passant par les trois mêmes points. L'aire du segment parabolique $P_1AM_2M_3P_3$ ainsi défini est (N° 28)

$$\frac{2\varepsilon}{6}(y_1 + y_3 + 4y_2),$$

car la distance h des ordonnées extrêmes est ici 2ε . De même, par les trois points M_3, M_4, M_5 , on fait passer une parabole d'axe vertical et on remplace l'aire $P_3M_3M_5P_5$ par l'aire du segment parabolique

$$\frac{2\varepsilon}{6}(y_3 + y_5 + 4y_4),$$

et ainsi de suite. L'aire de la courbe a alors pour valeur approchée la somme de ces segments paraboliques

$$\frac{\varepsilon}{3}[y_1 + y_{n+1} + 2(y_2 + y_3 + \dots + y_{n-1}) + 4(y_4 + y_4 + \dots + y_n)].$$

Si la courbe et les ordonnées sont tracées avec soin, on peut évaluer la somme entre parenthèses à l'aide de la roulette Dupuit.

422. Formule de Poncelet. — Les formules précédentes ont le désavantage de ne pas donner de limite pour l'erreur commise : cet inconvénient disparaît avec la méthode de Poncelet. Dans

cette méthode, on commence par diviser l'arc de courbe considéré en arcs tels que, le long de chacun d'eux, la concavité soit dirigée dans le même sens : on évalue ensuite séparément l'aire de chacun des segments limités par ces arcs.

Soit alors M_1M_7 , un de ces arcs : admettons qu'il tourne sa concavité vers l'axe Ox . Divisons la base P_1P_7 du segment en un nombre pair de parties égales à ε , en six parties, pour fixer les idées (fig. 216). Soient $M_2P_2, M_3P_3, \dots, M_6P_6$, les ordonnées inter-

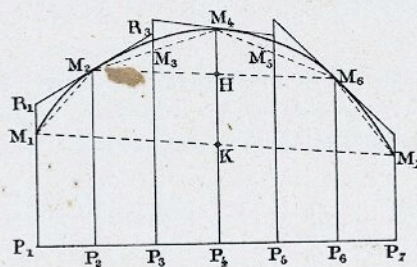


Fig. 216.

médiaires. Menons par les points M , d'indices pairs, des tangentes à la courbe, en limitant ces tangentes, aux points où elles rencontrent les prolongements des ordonnées voisines, d'indices impairs : ainsi la tangente, en M_2 , est limitée aux points R_1 et R_3 , où elle rencontre les ordonnées P_1M_1 et P_3M_3 . D'autre part, menons les cordes $M_1M_2, M_2M_4, M_4M_6, M_6M_7$. L'aire cherchée S est comprise entre l'aire circonscrite C formée par les trapèzes, tels que $P_1R_1R_3P_3$ et l'aire inscrite I limitée aux cordes : ces aires sont des sommes de trapèzes

$$C = 2\varepsilon(y_2 + y_4 + y_6),$$

$$I = \varepsilon \left(\frac{y_1 + y_2}{2} + y_2 + 2y_4 + y_6 + \frac{y_6 + y_7}{2} \right).$$

Nous aurons une valeur approchée de l'aire cherchée S , en prenant la demi-somme de ces deux grandeurs

$$\frac{C+I}{2} = \varepsilon \left[\frac{y_1 + y_7}{4} - \frac{y_2 + y_6}{4} + 2(y_2 + y_4 + y_6) \right].$$

L'erreur commise sera inférieure à la demi-différence $\frac{C-I}{2}$:

en effet, supposons par exemple $S > \frac{C+I}{2}$; l'erreur commise est

$$S - \frac{C+I}{2}$$

et comme $S < C$, elle est inférieure à $C - \frac{C+I}{2}$ ou à $\frac{C-I}{2}$.

On a donc :

$$\text{erreur} < \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{y_2 + y_6}{2} - \frac{y_1 + y_7}{2} \right),$$

On peut interpréter géométriquement cette valeur : soient H et K (fig. 216), les points de rencontre de l'ordonnée du milieu M_4P_4 avec les droites M_2M_6 et M_1M_7 , on a :

$$HP_4 = \frac{y_2 + y_6}{2}, \quad KP_4 = \frac{y_1 + y_7}{2},$$

$$\text{erreur} < \frac{\varepsilon}{2} \overline{HK}.$$

En général, si, au lieu de 7 ordonnées, on en mène un nombre impair $2n + 1$, la valeur approchée de l'aire est

$$\varepsilon \left[\frac{y_1 + y_{2n+1}}{4} - \frac{y_2 + y_{2n}}{4} + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2n}) \right]$$

et l'erreur commise est moindre que

$$\frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{y_2 + y_{2n}}{2} - \frac{y_1 + y_{2n+1}}{2} \right).$$

II. — INTÉGRATEURS ET INTÉGRAPHES

423. Principe des intégrateurs. — Les intégrateurs sont des appareils qui, par un procédé mécanique, enregistrent l'aire d'un contour fermé.

La pièce essentielle des intégrateurs est une tige rectiligne AB, qui se déplace parallèlement au papier portant l'aire à évaluer et sur laquelle est fixée une roulette circulaire R, mobile autour

de l'axe de la tige. Quand on déplace la tige d'une manière continue en appuyant la roulette sur le papier, celle-ci roule suivant une certaine loi, et un compteur enregistre le nombre de tours et de fractions de tour qu'elle accomplit.

Examinons d'abord quelques déplacements élémentaires de la tige AB (fig. 217).

1° La tige glisse sur elle-même, de AB en A'B' par exemple ; il est évident que la roulette ne tourne pas.

2° La tige se déplace parallèlement à elle-même, de façon à balayer l'aire d'un rectangle AA₁B₁B : la roulette roule constamment de R en R₁ ; si on appelle s l'arc de la circonférence de la

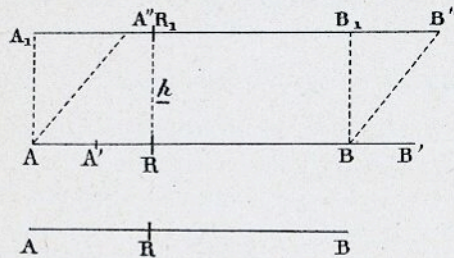


Fig. 217.

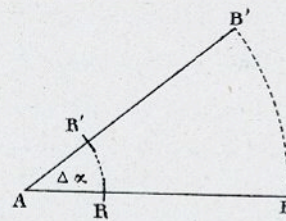


Fig. 217 bis.

roulette, compté, à partir d'une origine fixe, sur la roulette, jusqu'au point de contact avec le papier, l'accroissement Δs de cet arc est égal à RR_1 , c'est-à-dire à la hauteur h du rectangle.

3° La tige se déplace parallèlement à elle-même, de façon à balayer l'aire AA''BB'' d'un parallélogramme (fig. 217) : l'expérience montre que la roulette enregistre seulement le déplacement normal à son axe, c'est-à-dire que l'arc Δs de circonférence, qui vient en contact avec le papier, est égal à la hauteur h du parallélogramme. Cet arc est le même que si on amenait la tige de AB à A''B'', par une translation de AB en A₁B₁ normalement à AB, suivie d'un glissement de A₁B₁ en A''B''.

4° La tige tourne autour d'une de ses extrémités A, par exemple, d'un angle $\Delta\alpha$ (fig. 217 bis). Dans ce déplacement, la roulette roule constamment sur l'arc de cercle RR', décrit de A comme centre, avec AR comme rayon. On a donc, en appelant λ la distance AR

$$\Delta s = \lambda \Delta\alpha.$$

424. *Mesure des aires.*— Imprimons maintenant à la tige AB un déplacement continu qui l'amène de A_0B_0 en A_1B_1 en faisant décrire à ses deux extrémités les arcs de courbe A_0AA_1 et B_0BB_1 (fig. 218). Appelons l la longueur AB , λ la distance AR et α l'angle

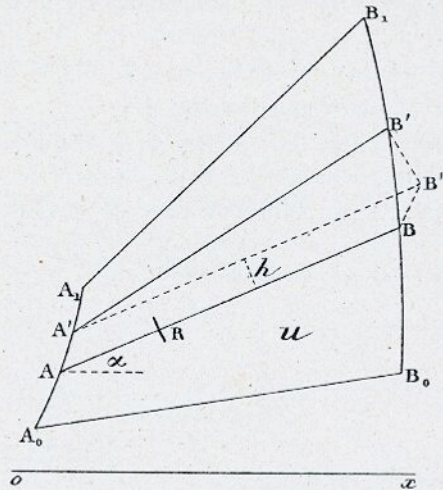


Fig. 218.

que fait la tige dans une position quelconque AB avec une direction fixe Ox . Soit u l'aire A_0B_0BA ; quand la tige subit le déplacement infiniment petit qui l'amène de AB en $A'B'$, l'aire u croît de $du = ABB'A'$. Si, par A' , on mène une droite $A'B''$, égale et parallèle à AB , on peut regarder l'aire infiniment petite du comme égale à la somme du parallélogramme $ABB''A'$ de hauteur h et du secteur $B''A'B'$ dont l'angle est $d\alpha$:

$$du = lh + \frac{1}{2} l^2 d\alpha.$$

Calculons l'arc ds de roulette, qui s'est appuyé sur le papier dans le mouvement de AB en $A'B'$: cet arc est la somme de deux arcs, l'un : h , provenant du déplacement de AB en $A'B''$ et l'autre $\lambda d\alpha$, provenant du déplacement de $A'B''$ en $A'B'$ (déplacements élémentaires 3° et 4°). On a donc

$$ds = h + \lambda d\alpha.$$

L'élimination de h entre ces deux relations donne

$$(1) \quad du = lds + \left(\frac{1}{2}l^2 - l\lambda\right)dx.$$

Cette formule est générale, à condition de regarder ds comme positif ou négatif, suivant que la roulette tourne dans un sens ou dans l'autre. Par exemple, la position des tiges infiniment voisines AB et $A'B'$ peut être celle de la figure 219 où dx est négatif : du est alors la différence des aires $AEA' - BEB'$: son expression se compose du parallélogramme $AA'B''B$ ou lh , moins le secteur $B''A'B'$, c'est-à-dire $lh + \frac{1}{2}l^2 dx$, car dx est négatif ; d'autre part, on a encore $ds = h + \lambda dx$; on retrouve donc la formule (1).

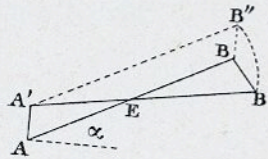


Fig. 219.

Pour avoir l'aire totale $A_0B_0B_1A_1$ (fig. 218), balayée par la tige, il faut faire la somme algébrique des éléments du , c'est-à-dire intégrer le deuxième membre de la formule (1), depuis la position A_0B_0 jusqu'à A_1B_1 . On a donc, en appelant s l'arc total de la roulette qui s'est appuyé sur le papier, α_1 et α_0 les angles des directions A_0B_0 et A_1B_1 avec Ox :

$$(2) \quad \text{Aire } A_0B_0B_1A_1 = ls + \left(\frac{1}{2}l^2 - l\lambda\right)(\alpha_1 - \alpha_0).$$

La quantité s se lit sur le compteur qui enregistre le nombre de tours de la roulette : $\alpha_1 - \alpha_0$ est l'angle des deux positions extrêmes de la tige.

On voit qu'on ferait disparaître cet angle en prenant $\lambda = \frac{l}{2}$, mais cela est inutile, car le terme dépendant de l'angle disparaît de lui-même quand on mesure l'aire d'un contour fermé, ainsi qu'on le verra plus loin.

425. Cas où la roulette est sur le prolongement de la tige. — Nous avons supposé, dans ce qui précède, la roulette placée entre A et B . Les formules seraient les mêmes, si la roulette était fixée sur le prolongement de la tige. Si la roulette est sur le

prolongement de la tige dans le sens AB , λ est supérieur à l . Si elle est sur le prolongement de la tige dans le sens BA , il suffit de supposer λ négatif. Avec ces conventions, la formule (2) s'applique à tous les cas.

426. *Aire d'un contour fermé.* — Soit une courbe fermée quelconque C dont il s'agit d'évaluer l'aire S (fig. 220). Traçons

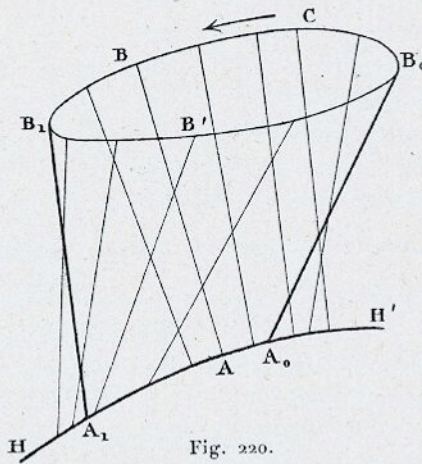


Fig. 220.

une courbe auxiliaire $H'H'$ ne traversant pas l'aire et plaçons la tige AB de telle façon que l'extrémité A glisse le long de $H'H'$, tandis que l'extrémité B décrit la courbe C dans le sens de la flèche d'un mouvement continu. Soient A_0 et A_1 les positions extrêmes du point A sur la courbe $H'H'$ dans ce mouvement, A_0B_0 et A_1B_1 les positions correspondantes de la tige. Quand B va de B_0 à B_1 par l'arc supérieur B_0BB_1 , la somme algébrique des aires élémentaires du , balayées par la tige, est $A_0B_0BB_1A_1$; quand le point B revient de B_1 en B_0 par l'arc inférieur $B_1B'B_0$, le point A revient de A_1 en A_0 et la somme algébrique des aires du balayées par la tige est l'aire $A_1B_1B'B_0A_0$ changée de signe. Donc, quand le tour est complet, la somme algébrique $\int du$ est égale à l'aire S de la courbe C .

$$S = \int du = \int l ds + \int \left(\frac{1}{2} l^2 - l\lambda \right) dx.$$

Comme, dans ce mouvement, la tige reprend la même direc-

tion qu'au départ après une suite d'oscillations entre deux directions limites, la somme $\int dx$ des variations angulaires est nulle et on a

$$S = ls.$$

Soit n le nombre de tours et de fractions de tour effectués par la roulette, r son rayon, on a

$$s = 2\pi rn,$$

$$S = 2\pi rln.$$

Si on construit l'appareil de façon que $2\pi rl = 1$, on a

$$S = n.$$

L'aire cherchée se lit donc directement sur le compteur.

Il est essentiel, pour que cette formule soit exacte, que le point A ne fasse qu'aller et venir le long d'un arc de III' et que $\int dx$ soit nul.

Théoriquement, cette courbe III' est quelconque. Pratiquement on lui donne la forme soit d'un arc de cercle, soit d'un segment de droite.

427. Planimètre d'Amsler. — Dans cet appareil, la courbe III' est un arc de cercle (fig. 221). On oblige le point A à décrire un arc de cercle, au moyen d'une bride OA, rattachant l'extrémité A à un point fixe O; le point B décrit la courbe C dont on veut évaluer l'aire. Pour que la formule

$$S = n,$$

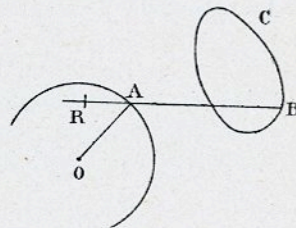


Fig. 221.

s'applique, il faut, qu'après un tour complet de B sur la courbe, le point A ait décrit deux fois, en sens inverses, le même arc de cercle et que la tige revienne à sa direction première sans avoir fait de tour sur elle-même.

Quand la courbe C est trop grande par rapport aux dimensions de l'appareil, on peut la fractionner. On peut aussi placer le

point fixe O dans l'intérieur de C (fig. 222), de telle façon que le cercle, lieu du point A , soit dans l'aire cherchée, et faire décrire au point B la courbe C . L'aire balayée par la tige AB est alors l'aire de la couronne comprise entre le cercle et la courbe. On a

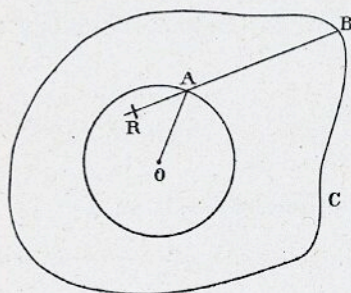


Fig. 222.

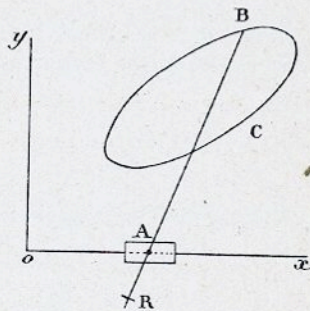


Fig. 223.

donc en appliquant la formule (2), et, remarquant que, la direction de la tige faisant un tour complet, la différence $\alpha_1 - \alpha_0 = 2\pi$:

$$\text{couronne} = ls + \left(\frac{1}{2}l^2 - l\lambda\right)2\pi.$$

L'aire de C est alors

$$S = ls + \left(\frac{1}{2}l^2 - l\lambda\right)2\pi + \pi \overline{OA}^2.$$

La quantité

$$ls = 2\pi rln,$$

est donnée par le compteur ; la quantité

$$\left(\frac{1}{2}l^2 - l\lambda\right)2\pi + \pi \overline{OA}^2.$$

est une constante de l'appareil calculée une fois pour toutes. On a donc l'aire immédiatement.

428. **Deuxième forme du planimètre.** — On a construit également des planimètres ou intégrateurs, dans lesquels la courbe HH' est une droite Ox (fig. 223). La tige AB est articulée, par A , à un chariot assujéti à glisser le long d'une rainure rectiligne, le

point B parcourt la courbe C, dont on veut déterminer l'aire S. La roulette R enregistre cette aire d'après la formule précédente

$$S = ls = 2\pi r \dot{l}n.$$

On peut dire que cet appareil donne la valeur de l'intégrale $\int y dx$, prise le long de C.

D'autres roulettes fixées sur l'appareil par l'intermédiaire de multiplicateurs d'angles donnent en outre les intégrales

$$\int y^2 dx, \quad \int y^3 dx$$

qui se présentent dans le calcul des centres de gravité et des moments d'inertie.

429. EXERCICE. — On considère une tige AB qui porte une roulette, comme dans le N° 424, et on suppose que ses deux extrémités A et B décrivent des courbes fermées d'aires S et Σ . Démontrer les résultats suivants :

1° Si la tige revient à sa position primitive, sans avoir fait un tour sur elle-même, on a

$$\Sigma - S = ls.$$

2° Si elle revient à sa position primitive après avoir fait un tour, on a

$$\Sigma - S = ls + \pi \left(\frac{l^2}{2} - l\lambda \right).$$

3° Si elle fait k tours,

$$\Sigma - S = ls + k\pi \left(\frac{l^2}{2} - l\lambda \right).$$

Lorsque l'extrémité A ne fait qu'aller et venir sur un arc HH' (N° 426), l'aire S décrite par A est nulle; les formules donnent alors l'aire Σ décrite par B.

430. Intégraphes. — Les appareils que nous venons de décrire donnent la valeur numérique d'une aire. Il existe d'autres appareils appelés *intégraphes* représentant graphiquement la variation de l'aire d'un segment de courbe donnée.

Soit, figure 224, une courbe

$$(1) \quad y = f(x),$$

coupant Oy en a . Cherchons une autre courbe dont l'ordonnée Y vérifie l'équation

$$(2) \quad \frac{dY}{dx} = f(x).$$

L'ordonnée Y de cette nouvelle courbe est donnée par la formule

$$(3) \quad Y = C + \int_0^x f(x) dx,$$

où C est une constante arbitraire.

Soit $x = OP$, une valeur attribuée à x , m le point correspondant de la courbe (1), M le point correspondant de (3),

$$y = mP, \quad Y = MP.$$

On a

$$Y = C + \text{aire } OamP.$$

Pour $x = 0$, $Y = C$; on a ainsi le point A , d'ordonnée arbitraire C ; x croissant, le point M décrit une courbe AM , appelée *courbe intégrale*. Les intégraphes tracent mécaniquement cette courbe intégrale, quand un traceur parcourt la courbe donnée (1).

Le principe de ces appareils est le suivant : prenons $PE = 1$, le coefficient angulaire de la droite Em est $\frac{mP}{PE}$, c'est-à-dire y ou $f(x)$.

Dans l'appareil, une tige rigide PP' est assujettie à se déplacer perpendiculairement à Ox : le long de cette tige, glissent librement : 1° un traceur m , qui décrit la courbe donnée; 2° une roulette M , qui ne peut que rouler et non

glisser sur le papier, et dont le plan perpendiculaire au papier peut prendre toutes les orientations possibles.

Le traceur m et la roulette sont reliés par un mécanisme tel que, dans chaque position du traceur, le plan de la roulette a

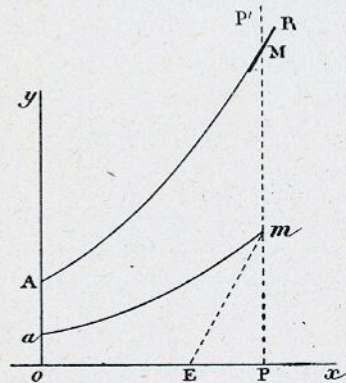


Fig. 224.

pour trace sur le papier une parallèle R à Em. Dans ces conditions, quand le point m décrit la courbe

$$y = f(x),$$

la roulette roule sur le papier, en suivant une courbe, dont la tangente est, à chaque instant, la trace R de la roulette. Comme R est parallèle à Em, le coefficient angulaire $\frac{dY}{dx}$ de la tangente à la courbe, lieu de M, est égal à celui de Em : on a donc

$$\frac{dY}{dx} = f'(x),$$

et le point M décrit une courbe intégrale. On règle l'appareil de façon que, pour $x=0$, la roulette soit en A ; on obtient alors la courbe intégrale partant de A.

Nous renverrons pour la description de ces appareils à l'ouvrage intitulé : *les Intégraphes, la courbe intégrale et ses applications*, par Abdank-Abakanowics (Gauthier-Villars, 1886). On a fait également diverses tentatives pour construire des machines, permettant de tracer l'intégrale générale de certaines équations différentielles du premier ordre. On trouvera une énumération détaillée de ces appareils dans une publication faite en Allemagne sous le titre suivant : *Katalog mathematischer und mathematisch-physikalischer Modelle, Apparate und Instrumente*, von Walther Dyck, München, Universitätsbuchdruckerei von Dr. C. Wolf und Sohn, 1892.
