

LE PLANIMÈTRE POLAIRE

de M. AMSLER (de Schaffhouse.)

Extrait d'une Notice publiée par MM. Piccard et Cuenoud, dans le Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences naturelles, à Lausanne.

PAR M. CH. LABOULAYE.

4. L'ingénieux planimètre d'Oppikofer (de Berne), le premier appareil qui ait vraiment fourni la solution du curieux problème de l'évaluation mécanique des surfaces, a, comme on sait, pour organe principal un cône sur lequel tourne par simple frottement, une roue dont la rotation est enregistrée par un compteur. La figure à mesurer étant supposée divisée en rectangles dont deux côtés sont parallèles à la direction que suit le cône en se déplaçant, et les deux autres perpendiculaires à cette direction, et, par suite, parallèles au déplacement de la roulette, on obtient la quadrature du rectangle en suivant avec un index les premiers côtés en entraînant le cône, et les seconds en entraînant la roulette.

Ce second mouvement serait de nulle utilité si, au lieu d'un cône, on supposait un cylindre; le compteur ne marquerait que la somme des deux premiers côtés, sans rien indiquer relativement aux deux autres, on n'aurait pas un planimètre. C'est donc la propriété du cône d'offrir, pour les deux positions de la roulette, deux sections différentes, qui permet d'obtenir la quadrature, comme on le voit facilement quand on établit la théorie bien connue du planimètre d'Oppikofer. Nous voulions seulement faire remarquer que la propriété rappelée ici n'est autre chose qu'une propriété des triangles semblables formés dans le plan passant par l'axe du cône, par celui-ci, sa génératrice, et

les deux rayons des cercles de contact avec la roulette, dans ses deux positions successives.

M. Piccard est, en effet, arrivé à une démonstration élémentaire du planimètre d'Oppikofer, fondée sur les propriétés des triangles semblables, qui conduisent directement à l'explication du planimètre d'Amsler; ce qui offre l'avantage de montrer que ces appareils, tout différents qu'ils paraissent en apparence, sont en réalité équivalents. Nous donnerons auparavant la description d'une espèce d'abaque auquel la considération des triangles semblables a conduit M. Piccard, et qui est tellement simple qu'il paraît susceptible d'applications fréquentes.

ABAQUE DE M. PICCARD.

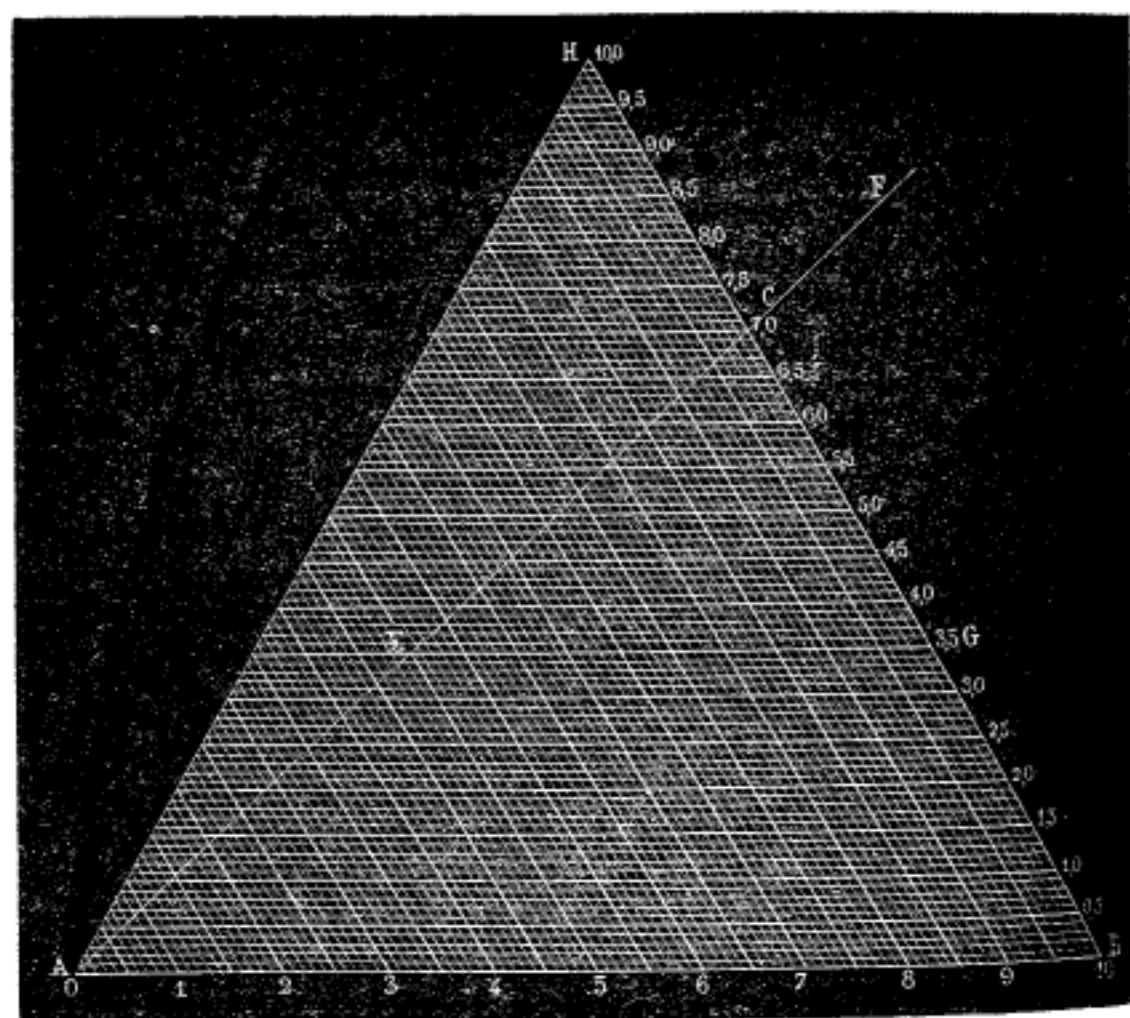


Fig. 1.

Soient les triangles semblables ADE et ABC, nous aurons la proportion

$$AD : DE :: AB : BC.$$

Si nous faisons $AB = 40$ par exemple, nous aurons

$$AD \times BC = DE \times 40,$$

ou comme $BG = DE$

$$AD \times BC = BG \times 40.$$

Ce résultat permet de construire un abaque pouvant servir à opérer numériquement la multiplication et la division et à calculer graphiquement avec le compas, sans aucun calcul, la surface des figures planes qui auraient été décomposées en triangles ou en rectangles.

Construction. — Prenez un triangle quelconque, le triangle équilatéral de préférence; divisez les côtés en 40 parties égales: menez des parallèles entrecoupées par des lignes plus fortes, de 5 en 5, pour reposer la vue; placez les chiffres de 1 à 40, de A en B; placez les chiffres de 0,5 à 40,0 de B en H; placez enfin au point A comme pivot, un fil fin, ou le tranchant d'une règle mobile autour de ce point, AF.

3. *De la multiplication.* — Pour obtenir le produit de deux facteurs inférieurs à 40, par exemple 5×7 , placez la ligne AF sur l'un des facteurs, par exemple sur 7 en C; prenez le facteur 5 en D. Remontez la parallèle DE passant en D jusqu'à sa rencontre avec AF en E; suivez l'autre parallèle EG, le nombre 3,5 en G, multiplié par 40 donnera 35 pour résultat de 5×7 . On aura de même à première vue les divers multiples de 7, par tous les nombres qui, marqués sur AB, sont le point de départ de toutes les parallèles à BH qui rencontrent AF.

En donnant aux côtés du triangle une longueur de 3 décimètres environ, on pourra obtenir exactement les produits inférieurs à 40,000, de deux facteurs inférieurs à 400, pourvu qu'on ait soin de déterminer, mentalement, quel doit être le chiffre des unités du produit. Ainsi, pour avoir le produit de 97 par 86, on détermine le chiffre 2 des unités, et l'instrument, par sa lecture, donnera avec certitude le chiffre des dizaines, des centaines et des mille, soit le nombre 8340 qui devient 8342 par l'adjonction

du chiffre 2 des unités. Mais si l'on voulait obtenir exactement le produit inférieur à un million de deux facteurs inférieurs au nombre 4000, les côtés du triangle devraient atteindre à peu près 4 mètres de longueur. L'exactitude de cet instrument est donc fort limitée, mais il n'en est pas moins précieux, pouvant donner facilement et simplement des résultats approchés suffisants dans nombre de cas.

4. *De la division.* — Pour obtenir le quotient d'un nombre inférieur à 400, par un diviseur inférieur à 40, ce quotient devant aussi être inférieur à 40 par exemple 35 divisé par 7 : placez la ligne AF sur le diviseur 7 en C; prenez le dividende 35 en G (produit du diviseur et du quotient qui doit être multiplié par 40) et suivez la ligne GE jusqu'à sa rencontre avec la ligne AF en E; suivez la parallèle ED, le chiffre 5 en D indiquera le quotient cherché.

Dans la position actuelle de la ligne AF passant par le diviseur 7 en C, on peut obtenir de même les quotients par 7 d'autres nombres inférieurs à 70, ces quotients devant être inférieurs à 40.

5. *Du calcul des surfaces en général.* — Si l'on veut calculer l'aire d'une figure décomposée en triangles, sans opérer aucun calcul numérique, il faudra diviser la ligne BH des produits en 50 parties égales au lieu de 400. Puis, portant la hauteur du triangle sur BH, de B en C, par exemple, et la base sur AB, de A en D, par exemple, la ligne DE représentera graphiquement la surface du premier triangle, et on en porte la valeur sur la ligne BH, servant d'échelle, au point G. On obtiendra de même la surface des autres triangles au moyen d'autres lignes qui, réunies bout à bout sur la ligne BH servant d'échelle, conduiront à la valeur numérique de l'aire totale de la figure cherchée, en opérant graphiquement, sans avoir fait un seul calcul.

DESCRIPTION DU PLANIMÈTRE DE AMSLER.

6. Le planimètre de M. Amsler a été construit dans le but d'obtenir un appareil plus simple, moins coûteux que celui d'Oppikofer (son prix ne s'élève qu'à 50 ou 80 francs selon la gran-

deur). La figure 2 le représente de demi-grandeur. Il se compose d'une tige A à section carrée, portant à l'une de ses extrémités une pointe F, et à l'autre une coulisse H qui glisse sur elle à frottement doux. A cette coulisse est fixée, à pointes, une roulette D dont le rebord repose sur le papier et qui est divisée sur son contour; un vernier L fixe, sert à apprécier les fractions de division de la roulette. L'axe de celle-ci porte une vis sans fin, au moyen de laquelle un petit pignon K tourne d'une dent à chaque tour que fait la roulette D; l'axe vertical de ce petit pignon porte une roue G divisée en dix parties égales. Sur le devant de la pièce H vient s'articuler, à pointe, une tige B terminée en E par un piquoir qui peut s'implanter dans le papier.

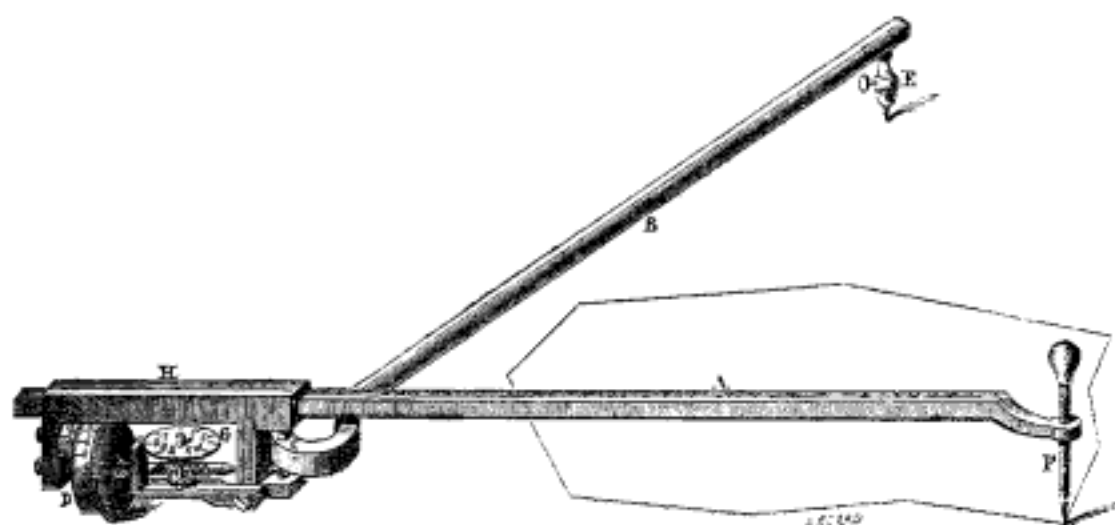


Fig. 2.

Pour se servir de l'instrument, on fait glisser la coulisse sur la tige A jusqu'à ce que la longueur CF soit en rapport avec l'échelle du dessin que l'on veut évaluer. Pour faciliter cette opération, on a marqué sur la tige A les traits qui doivent arriver à la partie antérieure de la coulisse pour telle ou telle échelle déterminée.

L'instrument étant réglé, on fixe la pointe E en dedans ou en dehors de la figure dont on veut faire la quadrature, on fait tourner la roue D de manière à ramener le zéro sur sa graduation en coïncidence avec le zéro du vernier L, et le zéro de la roue G en face d'un repère fixe. On marque exactement le point de départ du traçoir F, et l'on parcourt avec ce traçoir le contour de la figure de gauche à droite (comme les aiguilles d'une

montre), jusqu'à ce que l'on revienne exactement au point de départ. On lit alors sur la roue G le nombre de divisions parcourues, qui indique les centaines du résultat, et sur la roue D les dizaines et les unités; les dixièmes d'unité peuvent s'apprécier au moyen du vernier.

Cette lecture donne immédiatement la surface cherchée lorsque la pointe E a été fixée en dehors de la surface sans calculer. Si, au contraire, la pointe E a été fixée à l'intérieur de cette surface, il faut ajouter à l'indication de l'instrument un nombre constant qui est gravé sur la tige A, à côté du trait qui affleure l'extrémité de la coulisse.

Supposons, pour éclaircir les explications qui précèdent, que l'on ait fait arriver à l'extrémité de la coulisse le trait marqué $100^{\text{mm.c.}}$; chaque division de la roulette D indiquera une surface parcourue de 100 millimètres carrés. Si, après avoir parcouru le contour de la figure, la roue G indique 3, et la poulie D 47,8, la surface sur 347,8 unités, soit $400 \times 347,8 = 34780$ millimètres carrés, la pointe E étant fixée en dehors de la figure. Si la pointe a été fixée dans l'intérieur, il faudra ajouter à la lecture 347,0 le nombre 1912,6, qui se trouve gravé en face du trait $100^{\text{mm.c.}}$, en sorte que la surface suive 2360,4 unités, soit $400 \times 2260,4 = 226040$ millimètres carrés.

7. Il faut prendre garde que lorsque le point E est placé dans l'intérieur de la figure, l'indication de l'instrument peut être négative, en sorte qu'il faudrait alors la retrancher du nombre constant.

Pour éviter l'inconvénient de s'assurer si la lecture doit être positive ou négative, il vaut mieux ne pas partir de zéro, et procéder de la manière suivante :

Le compteur est disposé pour marquer une quantité assez notable à l'origine, dont on fait d'abord la lecture. Supposons que celle-ci donne 235,4 par exemple.

On parcourt le contour de la figure avec le traçoir, et quand on est revenu exactement au point de départ, on fait une seconde lecture. Soit, par exemple, pour celle-ci 473,2. On ajoute à cette lecture le nombre constant 1912,6, ce qui donne 2883,4, et l'on retranche de cette somme la première lecture 235,4, ce qui donne 2153,0 unités, soit 215300 millimètres carrés. L'indica-

tion de l'instrument équivaut à une indication négative quand la seconde lecture donne un nombre inférieur à celui que donne la première.

8. *Théorie du planimètre d'Amsler.* — Nous allons voir maintenant, en formulant la théorie de l'instrument, la raison du mode d'opérer qui vient d'être indiquée. Cherchons d'abord à bien définir les principes sur lesquels repose l'instrument.

Tandis que dans le planimètre d'Oppikofer on suppose que les figures dont on cherche l'aire sont décomposées fictivement en rectangles, qu'on suppose prolongés jusqu'à une limite d'action de l'instrument répondant au sommet du cône, on doit, dans le planimètre d'Amsler, considérer la figure à mesurer comme décomposée en une infinité de secteurs dont les arcs coïncideraient avec le périmètre de la figure à calculer, et dont les centres se confondraient avec le pivot, limite de l'action de l'instrument. Or, il est bien évident que si une roulette tournant autour d'un axe, qui serait le rayon d'un cercle, suivait le contour de l'arc d'un secteur circulaire, sa rotation serait égale à ce contour, et, par suite, proportionnelle à la surface du secteur, pourrait par suite servir à la mesurer.

Tel est le principe du planimètre polaire, mais la nécessité de pouvoir suivre les contours de secteurs de rayons différents et diverses autres conditions de la pratique forcent à ne pas laisser la roulette sur le rayon, à la placer sur la barre portant le traçoir qui est articulée avec ce rayon.

On est arrivé ainsi à la disposition représentée plus haut, et les secteurs se présentent alors à l'instrument comme le représente la figure 3, le pôle étant extérieur au polygone à mesurer.

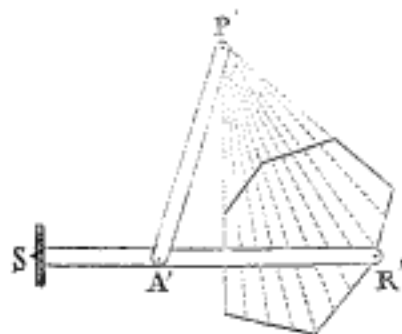


Fig. 3.

On comprend bien que l'index, en parcourant les arcs des grands secteurs, fait cheminer la roue dans un certain sens, et qu'en revenant en sens contraire les indications sont de signe contraire, que si les premières mesurent la surface des grands secteurs, les autres mesurent la surface des petits, et que le résultat marqué par l'instrument sera la mesure cherchée. On voit bien

aussi que si le pivot est situé à l'intérieur du polygone, il n'y a plus de surface d'emprunt, de petits secteurs auxiliaires.

Mais le principe de la mesure du secteur par la mesure des arcs parcourus par une roulette placée sur un rayon tournant autour du centre et se déplaçant sur la circonférence s'applique-t-il aux dispositions qu'il a fallu adopter, c'est-à-dire au placement sur le côté de la roulette montée sur une barre articulée avec le rayon pour éloigner la roulette de la figure, où elle empêcherait de voir le chemin qu'elle doit suivre, ne pourrait glisser le long d'une règle servant à suivre les contours d'un polygone, etc. Il reste à prouver qu'on a bien la mesure des surfaces avec cette disposition, en suivant les côtés d'un polygone, quelle que soit leur direction; c'est ce que nous ferons en établissant d'abord quelques propositions.

9. On sait que si un cercle roule, sans glisser, sur une droite qui lui est tangente, un point quelconque de la circonférence parcourt, dans ce mouvement, un chemin égal à celui que décrit le centre.

Par suite, quand l'axe d'une roulette pouvant tourner en s'appuyant sur un plan parallèle à cet axe, se transporte parallèlement à lui-même, un point de la circonférence de la roulette parcourt un arc égal au chemin parcouru par l'axe.

Si l'axe se meut dans le sens de sa longueur, la roulette glisse sans tourner.

Enfin si le point de contact de la roulette et du plan parcourt

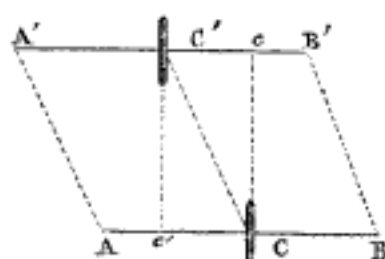


Fig. 4.

sur celui-ci une droite quelconque CC' (fig. 4), la roulette glisse et tourne tout à la fois, et l'arc parcouru par un point quelconque de sa circonférence dépend de l'angle que fait la direction CC' avec l'axe de la roulette.

En désignant par α l'angle $C'Cc$, on peut décomposer le mouvement de la roulette suivant CC' en un mouvement de glissement suivant $C'c$ et un mouvement de roulement suivant Cc ; la roulette ne tournera qu'en vertu de ce second mouvement, en sorte que le chemin Cc parcouru par un point de la circonférence est donné par l'équation : $Cc = CC' \cos \alpha$.

α étant l'angle de la direction CC' avec le plan de la roulette. Nous pouvons passer maintenant à la démonstration principale.

40. En réduisant à des lignes les tiges qui composent le planimètre d'Amsler, on peut le considérer comme formé de deux tiges de longueurs invariables, AC et BD , articulées en A . Le point C est fixe, l'extrémité B suit le contour de la figure à mesurer et l'extrémité D porte une roulette dont le plan est perpendiculaire à BD (fig. 5).

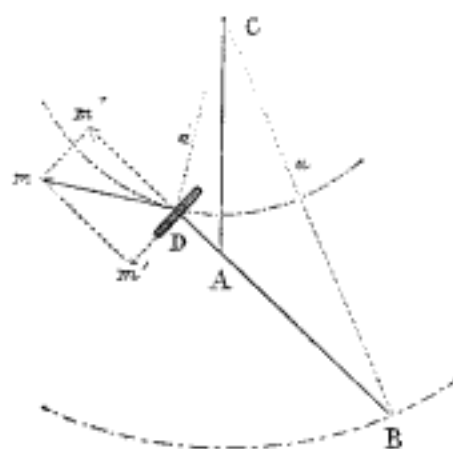


Fig. 5.

Supposons d'abord que le point B décrive un cercle de rayon a et dont le centre soit en C . Il est évident que par suite de l'invariabilité du triangle ABC , l'instrument conserve une figure constante, en sorte que le point de contact D , de la roulette et du plan, décrit un cercle concentrique au premier, et dont je désigne le rayon par a' .

En décomposant, comme ci-dessus, le mouvement de la roulette suivant les directions Dm' et Dm'' , on aura, en désignant par e , le chemin parcouru par le point D sur le cercle CD , par e' l'arc parcouru à la circonférence de la roulette, et par α l'angle mDm' :

$$e' = e \cos \alpha \quad (4).$$

Pour déterminer l'angle α en fonction du rayon a du cercle qui parcourt le point B on remarque que le triangle CDA donne :

$$\overline{CA}^2 = \overline{CB}^2 + \overline{DA}^2 - 2 \overline{CB} \times \overline{DA} \cos CDA.$$

ou, en observant que $CDA = 180^\circ - \alpha$, car $CDm'' = mDm'$, les

lignes des deux angles étant perpendiculaires les unes aux autres, et posant $CA = R$, $DA = r$, il vient :

$$R^2 = a'^2 + r^2 + 2 a' r \cos \alpha \quad (2).$$

Le triangle CDB donne également :

$$\overline{CB}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{DB}^2 - 2 \overline{CD} \times \overline{DB} \cos CDA$$

et en posant $AB = l$:

$$a^2 = a'^2 + (r + l)^2 + 2 a' (r + l) \cos \alpha \quad (3).$$

Retranchant (2) de (3), on a :

$$a^2 - R^2 = 2 r l + l^2 + 2 a' l \cos \alpha,$$

d'où

$$a' \cos \alpha = \frac{a^2 - (R^2 + l^2 + 2 r l)}{2 l}. \quad (4)$$

Quand le point B décrit un arc de cercle dont la longueur est E, le rayon fictif CB parcourt un secteur dont la surface est :

$$\frac{1}{2} E \times CB, \text{ ou } \frac{1}{2} E a.$$

Dans le même temps, le point D décrit un arc semblable e, puisque la figure est invariable, lié à E par la proportion

$$\frac{e}{E} = \frac{a'}{a} \text{ d'où } e = \frac{E a'}{a},$$

et la roulette développe un chemin e' égal à $e \cos \alpha$ soit :

$$\frac{E a' \cos \alpha}{a}.$$

En remplaçant, dans cette expression, $a' \cos \alpha$ par sa valeur (4), on trouve :

$$e' = \frac{E}{a} \cdot \frac{a^2 - (R^2 + l^2 + 2 r l)}{2 l} = \frac{E a}{2 l} - \frac{E}{2 a l} (R^2 + l^2 + 2 r l),$$

$$\text{d'où} \quad e' l = \frac{E a}{2} - \frac{E}{2 a} (R^2 + l^2 + 2 r l) = \\ \text{surf. secteur} - \frac{E}{2 a} (R^2 + l^2 + 2 r l).$$

Le rapport $\frac{E}{a}$ de l'arc E à son rayon a est égal à la longueur

ω d'un arc semblable à E pris dans un cercle de rayon 1; on a donc : surf. secteur = $e'l + \frac{1}{2} \omega (R^2 + l^2 + 2rl) = e'l + \frac{1}{2} \omega H$ (5)

en appelant H la quantité $R^2 + l^2 + 2rl$, qui est constante, dans laquelle ne figurent que des quantités invariables pour un même état de l'instrument.

41. Supposons maintenant que le pôle de l'instrument étant en C, on fasse parcourir au traçoir B les arcs FG, IK, LM de plusieurs secteurs ayant pour centre C (fig. 6), et que l'on ramène ensuite ce traçoir en un point M' situé sur le rayon extrême, à une distance $CM' = CF$.

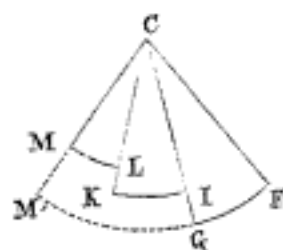


Fig. 6.

L'arc total parcouru par la roulette dans ce mouvement se compose évidemment de trois parties :

1° L'arc parcouru pendant le trajet du traçoir B sur les arcs FG, IK, LM.

2° L'arc parcouru pendant le trajet du traçoir sur les rayons GI, KL ;

3° L'arc parcouru pendant le trajet du traçoir sur le rayon MM'.

Il est évident que l'arc parcouru pendant ce dernier trajet est égal et de sens contraire à celui mentionné à 2°, la roulette fait le même chemin dans deux sens différents, lorsque le traçoir se meut suivant le rayon fictif CB (fig. 5), en montant ou en descendant d'une même quantité, en tournant autour du point A, en produisant les mêmes figures.

En définitive, l'instrument n'indique que l'arc parcouru pendant que le traçoir suivait les arcs FG, KI, LM. Si l'on désigne par $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, les arcs de rayon = 1, et semblables à FG, IK, LM, par e'_1, e'_2, e'_3 , les arcs correspondants parcourus par la roulette, par ω la somme $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3$, et par e' la somme $e'_1 + e'_2 + e'_3$, on aura :

$$\text{Surf. CFG} = e'_1 l + \frac{1}{2} \omega_1 H$$

$$\text{Surf. CIK} = e'_2 l + \frac{1}{2} \omega_2 H$$

$$\text{Surf. CLM} = e'_3 l + \frac{1}{2} \omega_3 H$$

$$\text{Surf. totale} = e' l + \frac{1}{2} \omega H \quad (6)$$

Si la somme des angles des secteurs valait 4 angles droits, l'ensemble des secteurs formerait un contour complet, une surface continue dans l'intérieur de laquelle se trouverait le point C. On aurait, dans ce cas, $\omega = 2\pi$, d'où

$$\text{Superficie totale} = e'l + \pi (R^2 + l^2 + 2rl).$$

12. Supposons ensuite que l'on veuille évaluer la somme des surfaces de plusieurs trapèzes circulaires $FGG'F'$, $IKK'I'$, etc., dont les côtés iraient aboutir en C (fig. 7); on aura à évaluer, comme précédemment, la surface $CFGIK...P$, puis la surface $CF'G'I'K'...P'$, et à retrancher celle-ci de la première. Pour cela on fera partir le traçoir B du point F, et on lui fera suivre le contour $FGIKL...PP'N'M'...G'F'F'$, en ayant soin de le ramener exactement au point de départ.

Cela fait on aura $\omega = 0$, puisque la somme des angles parcourus par le rayon CB dans un sens est égal à celle des angles parcourus en sens contraire, en sorte que la formule (6) donne pour ce cas :

$$\text{Surf. totale} = e'l.$$

13. *Cas général.*—Nous pouvons maintenant déduire, de ce qui précède, le moyen d'évaluer une surface plane terminée par un

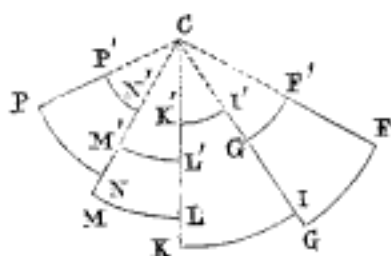


Fig. 7.

contour quelconque. En effet, si le pôle de l'instrument est placé hors de la figure à évaluer, en P' (fig. 3), on pourra considérer cette figure comme la somme d'un nombre infini de trapèzes circulaires élémentaires ayant pour sommet commun le point P' , et dont le contour exté-

rieur analogue à celui $FGIK...$ de la figure précédente, se confond avec chaque côté du polygone successivement (comme dans le triangle de Galilée une droite ligne portant le sommet des rectangles élémentaires, limite le triangle dont l'aire représente le produit cherché), en sorte qu'en désignant par e' l'arc développé par la roulette, on aura, comme ci-dessus :

$$\text{Surface} = e'l.$$

Si, au contraire, le pôle C de l'instrument est placé à l'inté-

rieur de la figure dont on veut connaître la surface, on pourra toujours considérer la figure polygonale fermée comme la somme d'un nombre infini de secteurs circulaires, ayant pour sommet le point C, et pour somme angulaire 4 droits, en sorte que l'on aura comme précédemment :

$$\text{Surface} = e' l + \pi (R^2 + l^2 + 2 r l).$$

44. Le nombre $\pi (R^2 + l^2 + 2 r l)$ est constant pour chaque état du planimètre; c'est le nombre que l'on voit gravé à côté du trait que l'on fait affleurer au bord de la coulisse. Quant au produit $e' l$, il peut être lu immédiatement sur la roulette si l'on a soin de graver à côté de chaque trait de division de celle-ci le produit précédent au lieu de la simple valeur de e' .

Au reste, on peut calculer le rayon de la roulette de façon qu'un tour corresponde à une surface déterminée. Par exemple, si on prend pour unité de surface le centimètre carré, et si un tour de la roulette doit correspondre à une surface d'un décimètre carré, on devra avoir, en désignant par x le rayon de la roulette :

$$100 = 2\pi x l, \text{ d'où } x = \frac{100}{2\pi l}$$

45. Dans la plupart des planimètres construits par M. Amsler, le rayon x de la roulette est de 4 centimètre. La longueur l du bras qui fait faire un tour de la roulette pour une surface de 4 décimètre carré est dans ce cas :

$$l = \frac{100}{2\pi} = 159^{\text{mm}}, 4.$$

Le calcul du nombre constant s'effectue facilement si l'on connaît les dimensions de l'instrument. Ainsi pour celui dont il vient d'être parlé, pour $l = 15,91$ centimètres, si l'on prend $R = 15,8$ centimètres et $r = 3,33$ centimètres, on aura :

$$\pi (R^2 + l^2 + 2 r l) = 1912,6.$$

46. Nous arrêtons ici l'extrait de l'intéressant mémoire de MM. Piccard et Cuenoud. Nous ne donnerons parmi diverses vérifications de la formule fondamentale qu'ils rapportent que la suivante qui fait bien comprendre la signification du nombre

constant qui doit être ajouté dans le cas d'une rotation complète autour d'un pôle.

Lorsque la direction de la roulette passe par le pôle C, le plan de cette roulette est dirigé normalement au chemin parcouru par le point de contact D, en sorte que la roulette ne tourne pas. L'indication de l'instrument est donc nulle, et si l'on fait parcourir au point B une circonférence complète autour du pôle C, la surface de ce cercle doit être égale au nombre constant.

Or, on peut s'assurer qu'il en est réellement ainsi, puisque le triangle CDB (fig. 5) devient rectangle dans ce cas, ce qui donne :

$$CB^2 = a'^2 + (DA + AB)^2 = CA^2 + AB^2 + 2 DA \times AB,$$

car $a'^2 = CA^2 - DA^2$, ou $CB^2 = R^2 + l^2 + 2 rl$

et πCB^2 ou surface du cercle décrit = $\pi (R^2 + l^2 + 2 rl)$.

47. La théorie de l'élégant petit instrument sur lequel nous avons cru devoir attirer l'attention de nos lecteurs se trouve bien élucidée, ce nous semble, par les déductions qui précèdent, et qui, bien que fondées sur des théories élémentaires, n'en sont pas pour cela moins satisfaisantes. Il ne peut sans doute être affranchi de l'inconvénient du glissement inhérent à tous les instruments à roulettes, mais en répétant deux ou trois fois l'opération si rapide de la mesure d'une surface, en changeant la position du pôle pour faire agir la roulette dans des conditions différentes, on doit obtenir des vérifications pouvant donner confiance dans les résultats obtenus.